on noncompact Riemannian manifolds. Namely, we study changing of the dimension of the space of bounded solutions of the given equation for various variations of potential $q(x)$. In particular, it is shown that a decrease in the potential does not decrease the dimension space of bounded solutions of the given equation.

Keywords: stationary Schrodinger equation, Liouville type theorems, noncompact Riemannian manifolds, massive sets.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ

С.Ф. Лукомский[1], М.Д. Мушко[2]

1 *lukomskiisf@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

2 *dart-maximus@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Рассматривается новый класс базисных сплайнов, которые получаются двукратным интегрированием функции Уолша. Приведены формулы построения интерполяционного сплайна по равномерной сетке, указана величина отклонения сплайна от интерполируемой функции. Доказано, что построенный базисный сплайн являетсяя решением масштабируюшего уравнения.

Ключевые слова: двоичные базисные сплайны, интерполяция, масштабирующее уравненеие.

Пусть $If(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x\in[0,1])$ – оператор интегрирования, $r_n(t)=\operatorname{sign}\sin 2^n t$ – функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x)=\prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша.

Определение 1. *Функцию $\tilde\varphi(x)=(4I)^2W_3(x)$ $(x\in[0,1])$ будем называть двоичным базисным сплайном 2-й степени.*

Очевидно, что $\tilde\varphi(x)$ есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4},\frac{k+1}{4}\right]$ $(k=0,1,2,3)$.

Определение 2. *Обозначим через $Q_2^{(N)}$ совокупность кусочно-многочленных функций 2-й степени, имеющих непрерывные производные на отрезке $\left[0,\frac{N}{4}\right]$, $N\ge 4$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4},\frac{k+1}{4}\right]$ совпадают с некоторым многочленом второй степени.*

Теорема 1. *При всех $x\in\mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde\varphi\left(x+\frac{n}{4}\right)=2;\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde\varphi\left(x+\frac{n}{2}\right)=1.$$

Теорема 2. *Совокупность функций $\tilde\varphi\left(x-\frac{n}{4}\right)$ $\left(-3\le n\le\frac{N-1}{3}, n\ne 1\right)$ образуют базис в пространстве $Q_2^{(N)}$*

Базисный сплайн $\tilde{\varphi}(\frac{x}{4})$ удовлетворяет масштабирующему уравнению.

Теорема 3. *Обозначим $F(x) = \tilde{\varphi}(\frac{x}{4})$. Справедливо равенство*

$$F(x) = \frac{1}{4}F(2x) + \frac{1}{2}F(2x-1) + \frac{1}{2}F(2x-2) + \frac{1}{2}F(2x-3) + \frac{1}{4}F(2x-4).$$

При фиксированном $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ определим функцию $\varphi(x) := \tilde{\varphi}\left(\frac{n}{x}x\right)$. Для нее $\operatorname{supp}\varphi = \left[0, \frac{4}{n}\right]$, $\varphi(n)$ есть многочлен 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $\varphi'(0) = \varphi'\left(\frac{2}{n}\right) = \varphi'\left(\frac{4}{n}\right) = 0$, $\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) = n$, $\varphi'\left(\frac{3}{n}\right) = -n$.

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = \overline{0,n})$ – равномерная сетка на $[0,1]$. Через $S(x)$ обозначим интерполяционный сплайн 2-й степени, совпадающий с $f(x)$ в узлах x_k, который построим следующим образом:
-1-й шаг. Пусть $M_0 \in \mathbb{R}$ произвольно. Полагаем $S_{-1}(x) = -\frac{M_0}{n}\varphi\left(x + \frac{3}{n}\right)$.
В этом случае $S'_{-1}(0) = M_0$.
0-шаг. Определим $S_0(x)$ равенством

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x - \frac{2}{n}\right)\left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right).$$

В этом случае $S_0(0) = f(0)$, $S'_0(0) = M_0$.
k-й шаг. $(1 \leq k \leq n)$

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + 2\varphi\left(x - \frac{k-1}{n}\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

После k-го шага, $S_k\left(\frac{j}{n}\right) = f\left(\frac{j}{n}\right)$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$.
Наконец, полагаем $S(x) = S_n(x)$. Очевидно, что $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и $S'(0) = M_0$.

Для оценки погрешности интерполяции определим функции

$$\psi_k(x) = f(x_{k-1} + x) + f(x_{k-2} + x) + \cdots + (-1)^{k-1} f(x_0 + x), \ \ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; k = \overline{1,n}.$$

Теорема 4. *Выберем $M_0 = \frac{2}{h}(f(x_1) - f(x_0))$ и пусть $h = x_k - x_{k-1}$. Тогда для $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$ справедливо неравенство*

$$|S(x) - f(x)| \leq \omega(h, \psi_{k-1}) + \omega(h, \psi_k) + \omega(h, f).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. *Ортогональные ряды.* – М.: АЦФ, 1999. – 550 с.

2. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. *Теория всплесков.* – М.: Физматлит, 2005. – 616 с.

BINARY BASIC SPLINES OF THE SECOND ORDER

S.F. Lukomskii, M.D. Myshko

We define binary basic splines of the second order, indicate an algorithm for constructing an interpolation polynomial of the second degree, and give an estimated deviation of the interpolation polynomial. We also prove that the constructed basic spline is a solution of some refinement equation.

Keywords: binary basic spline, interpolation polynomial, refinement equation.

УДК 517.982

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ШКАЛ

К.В. Лыков[1]

1 *alkv@list.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

В статье описывается связь между интерполяционными и экстраполяционными конструкциями. Показано, что для некоторого класса интерполяционных пространств, получаемых $\mathscr{K}$-методом вещественной интерполяции, имеет место также и экстраполяционное описание, получаемое заменой в интерполяционной конструкции $\mathscr{K}$-функционала на параметризованный набор норм точных интерполяционных пространств с характеристическими функциями t^θ, $\theta \in (0,1)$ (в частности, на набор норм пространств Петре).

Ключевые слова: интерполяционное пространство, интерполяционный функтор, экстраполяционное пространство, пространства Петре, вещественный метод интерполяции.

Предположим, что $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — *банахова пара*, т.е. такая пара банаховых пространств, что для некоторого хаусдорфова топологического пространства $\mathscr{T}$ имеют место непрерывные вложения $A_0 \subset \mathscr{T}$ и $A_1 \subset \mathscr{T}$. Тогда для любого элемента $x \in \mathscr{T}$, представимого в виде $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in A_0$ и $x_1 \in A_1$, можно определить $\mathscr{K}$*-функционал*:

$$\mathscr{K}(t, x; \vec{A}) := \inf_{x_0, x_1 : x_0 + x_1 = x} (\|x_0\|_{A_0} + t\|x_1\|_{A_1}), \quad t > 0.$$

С помощью $\mathscr{K}$-функционала строятся *пространства вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции*. Если F — банахова решетка измеримых функций на $(0, +\infty)$, то пространство $\vec{A}^{\mathscr{K}}_F$ определяется условием конечности нормы

$$\|x\|_{\vec{A}^{\mathscr{K}}_F} := \left\|\mathscr{K}(t, x; \vec{A})\right\|_F.$$

Частным случаем таких пространств являются *пространства Петре* $\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,q}$, $\theta \in (0,1)$, $q \in [1, \infty]$, для которых мы будем использовать следующую норму:

$$\|x\|_{\theta,q} := (q\theta(1-\theta))^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{-\theta} \mathscr{K}(t, x; \vec{A})\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \text{при } q < \infty, \text{ и } \|x\|_{\theta,\infty} := \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} \mathscr{K}(t, x; \vec{A}).$$